Dérivation : introduction au nombre dérivé

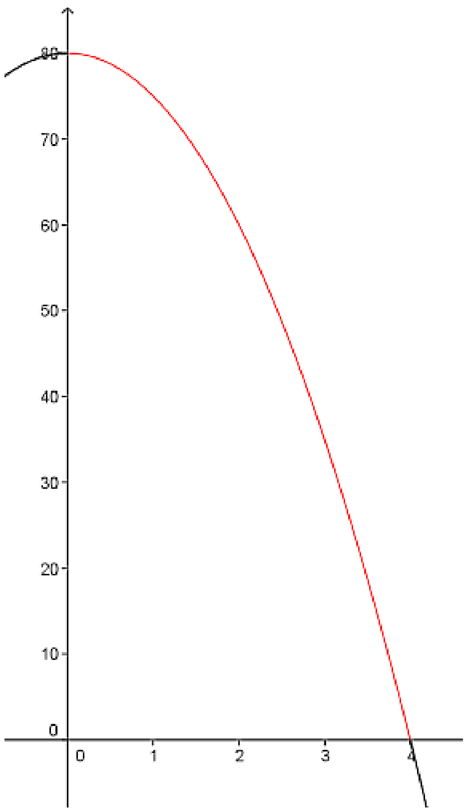
1. Vitesse moyenne et vitesse instantanée

On considère la chute libre d'un corps. Des relevés ont permis d'établir la *hauteur* du corps en fonction du *temps* :

temps (s)	0	1	2	3
distance (m)	80	75	60	35

La hauteur dépendant du temps, on peut trouver une formule de calcul qui permet de l'évaluer théoriquement. Cette méthode s'appelle une modélisation et on trouve : $z = 80 - 5t^2$ où z est la hauteur et t le temps.
Comme z ne dépend que tu temps, on la note alors $z(t)$, ce qui donne : $z(t) = 80 - 5t^2$.
On a donc établi une *fonction* z qui modélise la chute du corps et permet, en faisant un calcul, d'associer un temps donné à la hauteur correspondante du corps.

La représentation graphique de cette fonction est donnée ci-contre.



Seule la partie rouge représente l'évolution de la hauteur, car les conditions physiques sont $t \geq 0$ et $z \geq 0$.

On s'intéresse à la vitesse du corps. Pour cela on utilise la relation bien connue $v = \frac{d}{t}$ où v est la vitesse moyenne, d est la distance parcourue et t le temps pour la parcourir.

Dans notre cas, le calcul de la vitesse moyenne entre t_1 et t_2 pour des hauteurs respectives z_1 et z_2 avec $t_2 > t_1$ et $z_1 > z_2$ (car la hauteur diminue) est obtenue par la formule :

$v = \frac{z_1 - z_2}{t_2 - t_1}$ qui est positive.

Entre 1 et 2 secondes, on obtient : $v = \frac{75-60}{2-1} = 15$ m/s

Entre 1 et 1,5 secondes, on obtient : $v = \frac{75-68{,}75}{2-1{,}5} = 12{,}5$ m/s

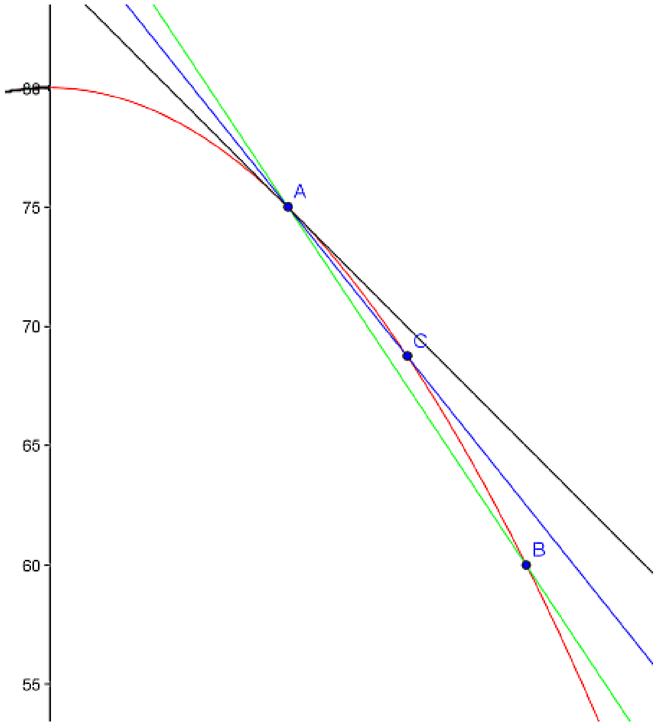
Seulement, on obtient une vitesse moyenne... On voudrait être plus précis et obtenir la vitesse en un point, dite « vitesse instantanée », c'est à dire la vitesse du corps pour une distance parcourue égale à 0.
Le calcul direct est impossible par la formule précédente puisqu'il ferait apparaître une division par 0.

Cependant, plus les 2 points pour lesquels on calcule la vitesse moyenne se rapprochent, et plus la vitesse moyenne s'approche de la vitesse instantanée. On va donc chercher à obtenir la vitesse instantanée, non par un calcul direct, mais en déterminant vers quelle valeur se rapproche la vitesse moyenne quand la distance parcourue s'approche de 0.
Cette valeur dite « limite », est alors la vitesse en un point pour une distance parcourue valant 0.

2. Coefficient directeur et tangente

Revenons au calcul général de la vitesse moyenne en le modifiant légèrement : $v=\frac{z_1-z_2}{t_2-t_1}=-\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}$

On obtient la formule qui donne **le coefficient directeur** de la droite passant par les points de coordonnées $(t_1;z_1)$ et $(t_2;z_2)$. La vitesse est ici égale à l'opposé de ce coefficient directeur, car la hauteur diminue[1].



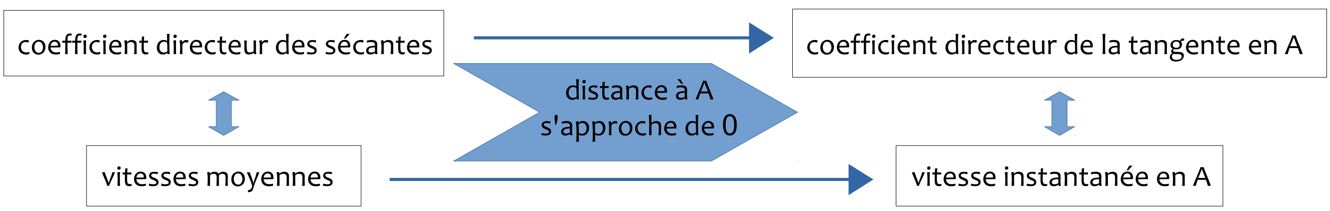
Pour les 2 vitesses précédemment calculées, on obtient les coefficients directeurs des 2 droites bleue et verte ci-contre, appelées sécantes. On reconnaît la courbe rouge précédente, qui donne la hauteur en fonction du temps.

La droite noire est la **tangente** à la courbe au point A : c'est la droite, parmi toutes celles qui passent par A, dont les points au voisinage de A sont les plus proches de ceux de la courbe. La tangente « colle » à la courbe.

A a pour coordonnées $(1;75)$,
$B(2;60)$ et $C(1{,}5;68{,}75)$.

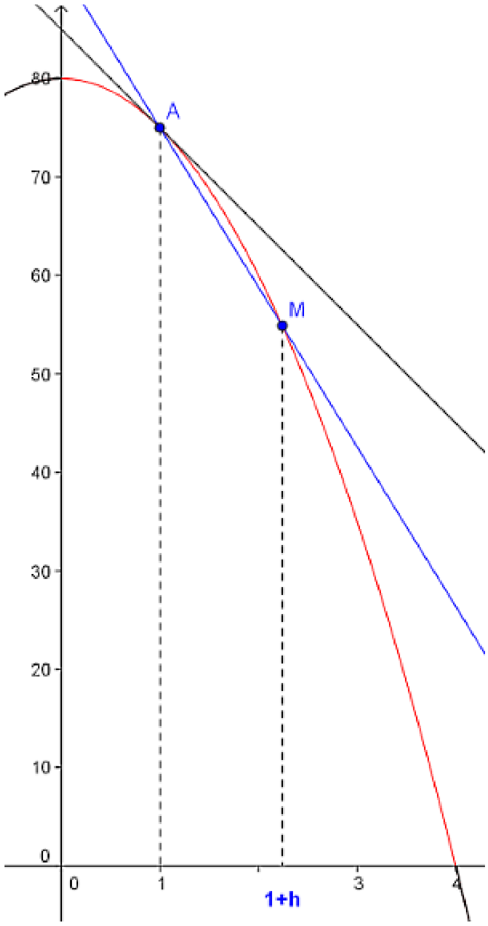
Le coefficient directeur de (AB) vaut -15 (la droite est dirigée vers le bas) soit l'opposé de la vitesse calculée entre les instants 1 et 2 secondes.
Le coefficient directeur de (AC) vaut $-12{,}5$ soit l'opposé de la vitesse calculée entre les instants 1 et 1,5 secondes.

On remarque que plus la distance à A diminue et plus la sécante est proche de la tangente en A (droite noire), donc le coefficient directeur des sécantes rejoint celui de la tangente.



➔ ***La question de la vitesse instantanée revient à déterminer le coefficient directeur de cette tangente.***

1. Dans le cas contraire la vitesse serait égale au coefficient directeur.



Commençons par calculer le coefficient directeur de toutes les sécantes passant par A.
On considère un point M de coordonnées $(1+h\ ;\ z(1+h))$, h est un nombre réel, différent de 0, correspondant à l'écart horizontal entre A et M.

Le coefficient directeur de (AM) vaut :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{z(1+h) - z(1)}{1+h-1} = \frac{z(1+h) - z(1)}{h}$$

Ce quotient utilisant la fonction z se nomme **taux d'accroissement de z en** 1.
Pour la fonction z de la chute du corps, ce taux d'accroissement vaut donc :

$$\frac{80 - 5(1+h)^2 - (80 - 5\times 1^2)}{h} = \frac{-5h^2 - 10h}{h} = -5h - 10$$

Le coefficient directeur de toutes les sécantes passant par A et un point de la courbe d'abscisse $1+h$ vaut donc $\boxed{-5h-10}$.

> Si $M = B$ d'abscisse 2 alors $h = 1$ et donc le coefficient directeur de (AB) vaut bien -15.
> Si $M = C$ d'abscisse $1{,}5$ alors $h = 0{,}5$ et donc le coefficient directeur de (AC) vaut bien $-12{,}5$.

Pour que les sécantes s'approchent de la tangente, il faut que le point M s'approche de A et donc que h s'approche de 0 (on dit que h tend vers 0). Le coefficient directeur des sécantes s'approche alors du coefficient directeur de la tangente.

Or le coefficient directeur des sécantes vaut $-5h-10$ qui s'approche de -10 quand h tend vers 0.

Le coefficient directeur de la tangente au point A vaut donc -10, soit une vitesse instantanée de $10\ m/s$ à l'instant 1 seconde.

> Ce coefficient directeur de la tangente en A d'abscisse 1 pour la courbe représentative de z s'appelle **le nombre dérivé de z en** 1.

3. Vitesse à l'impact

Question possible : quelle est la vitesse à l'impact ? La réponse permettrait de connaître l'énergie libérée à l'impact et avoir une idée de la déformation du corps et du sol au point d'impact.

<u>Étape 1 :</u> à quel instant le corps touche le sol ?
Pour avoir la vitesse instantanée, il nous faut connaître l'instant auquel le corps touche le sol, d'où cette

étape préparatoire.

La hauteur du corps vaut à cet instant 0 donc $z(t)=0 \Leftrightarrow 80-5t^2=0$

C'est une équation du second degré. La résolution donne deux solutions, dont une négative, qui est à rejeter. Reste : $t=4$

Étape 2 : quelle est la vitesse instantanée à l'impact ?

En reprenant la méthode précédente, nous allons déterminer l'expression générale du coefficient directeur des sécantes passant par le point de la courbe d'abscisse 4 (son ordonnée vaut donc 0). Ce coefficient directeur est calculé par le taux d'accroissement de la fonction z en 4.

Il vaut : $\dfrac{z(4+h)-z(4)}{h}=\dfrac{-5h^2-40h}{h}=-5h-40$

En faisant tendre h vers 0, nous obtenons le coefficient directeur de la tangente, soit -40.

La vitesse à l'impact est donc de $40\ m/s$, soit $288\ km/h$.

4. Récapitulatif dans le cas général

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a\in I$ et h un réel tel que $h\neq 0$.

Le taux d'accroissement de f en a vaut : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

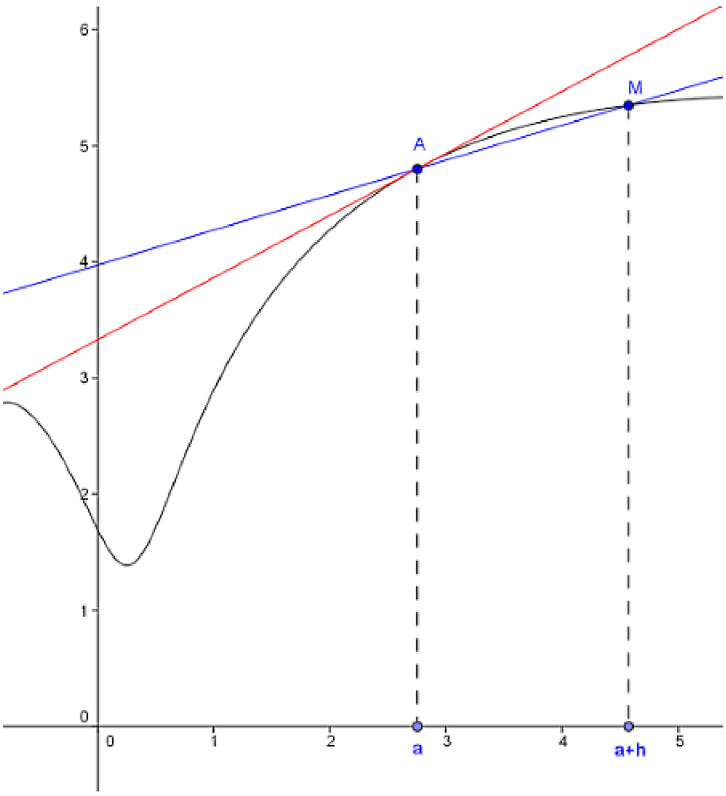
avec $a+h\in I$ pour que son image $f(a+h)$ existe.

Ce taux d'accroissement (appelé aussi taux de variation) est noté généralement $\tau(h)$, car une fois a fixé avant de le calculer, il ne dépend plus ensuite, pour le calcul, que de h.

Graphiquement $\tau(h)$ est égal au coefficient directeur de la droite sécante à la courbe de f, passant par les points d'abscisse a et $a+h$ (droite en bleu sur le graphique ci-contre).

Lorsque h tend vers 0, M s'approche de A, alors la sécante s'approche de la tangente (droite rouge), donc le coefficient directeur $\tau(h)$ de la sécante devient de plus en plus proche de celui de la tangente.

Remarque : cette tangente n'existe pas toujours et $\tau(h)$ ne s'approche alors d'aucune valeur.



Définition

La valeur vers laquelle s'approche $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0 se note $\lim_{h \to 0} \tau(h)$ et se lit « limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 ». Ce n'est pas le résultat d'un calcul particulier de $\tau(h)$, mais une valeur limite non atteinte[2], bien que $\tau(h)$ s'en rapproche indéfiniment.

Si la limite est un nombre réel, alors on le note $f'(a)$ et on le nomme **nombre dérivé de f en a**.

Dans les autres cas, il n'existe pas de nombre dérivé.

Si la limite est réelle, on a alors : $\lim_{h \to 0} \tau(h) = f'(a)$

$f'(a)$ est la valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
Ce point est le **point de tangence**.

Exemple :

Soit la fonction inverse définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

Remarque : on aurait pu aussi choisir comme intervalle de définition $]-\infty;0[$.

Soit $a \in I$ et h un réel tel que $a+h \in I$ et $h \neq 0$.

Déterminons le taux d'accroissement de f en a :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{a-(a+h)}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

Lorsque h tend vers 0, $a+h$ s'approche de a.

Donc, par opérations successives[3], $\lim_{h \to 0} \tau(h) = \frac{-1}{a^2}$

Ainsi, pour tout $a \in I$, $\boxed{f'(a) = \frac{-1}{a^2}}$

2. Parfois les limites sont atteintes, c'est à dire que la valeur limite est égale à une image par la fonction
3. Ces opérations sur les limites sont naturelles mais il existe des théorèmes pour le prouver