Essentiel pour le bac S

Analyse

Limites et continuité

Limite d'une somme

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI *

* forme indéterminée

Limite d'un produit

$\lim f$	l	$l \neq 0$	0	∞
$\lim g$	l'	∞	∞	∞
$\lim f \times g$	$l \times l'$	∞ *	FI **	∞ *

* règle des signes ** forme indéterminée

Limite d'un quotient

$\lim f$	$l \neq 0$			0			∞		
$\lim g$	$l' \neq 0$	0	∞	$l' \neq 0$	0	∞	$l' \neq 0$	0	∞
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	∞ *	0	0	FI **	0	∞ *	∞ *	FI **

* règle des signes ** forme indéterminée

Composition

$\lim_{x \to a} f(x) = \boldsymbol{b}$ $\lim_{x \to \boldsymbol{b}} g(x) = c$	$\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle ouvert I. Soit J l'intervalle image de I par f.
Alors pour toute valeur $k \in J$ il existe **une unique valeur** $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = k$.

Asymptote horizontale à la courbe de f d'équation $y = a$
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$

Asymptote verticale à la courbe de f d'équation $x = b$
$\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$

Suites

Suite croissante à partir de n_0 : $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq n_0$

Suite décroissante à partir de n_0 : $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$

Théorème de convergence : toute suite majorée (resp. minorée) et croissante (resp. décroissante) est convergente

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :
$u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = l \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = l$

Théorème de comparaison :
$u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Limite de q^n :

- $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} q^n = 0$
- $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

- **Suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison $r \in \mathbb{R}$**

Définition : $u_{n+1} = u_n + r$

Terme général : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_1 + (n-1)r$

Somme des termes consécutifs :

$$\frac{(1^{er}\ terme\ +\ dernier\ \ terme) \times nombre\ \ de\ \ termes}{2}$$

- **Suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison $q \in \mathbb{R}$**

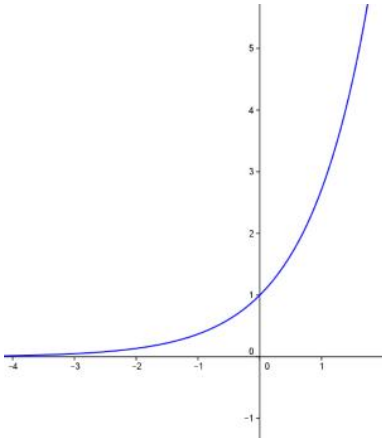
Définition : $u_{n+1} = u_n \times q$

Terme général : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Somme des termes consécutifs :

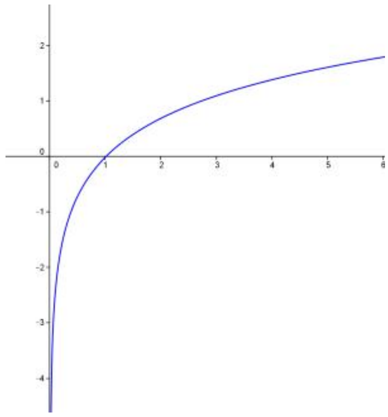
$$1^{er}\ terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}$$

Fonction exponentielle et logarithme



*Représentation graphique de la **fonction exponentielle***

Domaine de définition de l'exponentielle : $\mathbb{R}$



*Représentation graphique de la **fonction logarithme***

Domaine de définition du logarithme : $]0;+\infty[$

$e^1 = e$ $\quad e^0 = 1$ $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $\quad (e^a)^b = e^{ab}$	$\ln 1 = 0$ $\quad \ln e = 1$ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\quad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\quad \ln a^n = n \ln a$
$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$	$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

$$e^{\ln x} = x \qquad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \qquad \ln e^x = x$$

Limites spéciales

quotient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

produit

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

avec la dérivée

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \exp'(0) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

Dérivées et primitives

$f(x)$	$f'(x)$
x^n →	nx^{n-1}
$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ ←	x^n
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

$$(ku)' = ku' \qquad (u+v)' = u'+v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$f(x)$	$f'(x)$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
u^n →	$n\,u^{n-1} \times u'$
$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ ←	$u'u^n$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

- **Tangente**

Équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a

- **Variations de f**

$f'(x) > 0$ sur $[a;b]$ et nulle en un nombre fini de valeurs $\Rightarrow$ f strictement croissante sur $[a;b]$

$f'(x) < 0$ sur $[a;b]$ et nulle en un nombre fini de valeurs $\Rightarrow$ f strictement décroissante sur $[a;b]$

Intégrales

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ avec F une primitive de f c'est à dire $F' = f$

Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^b f(x)dx$

Linéarité : $\int_a^b k \times f(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Si $\forall x \in [a\,;\,b]$ $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Si $\forall x \in [a\,;\,b]$ $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Moyenne de f sur $[a;b]$: $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Géométrie

Les complexes

forme algébrique : $z = a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$

partie réelle : $Re(z) = a$

partie imaginaire : $Im(z) = b$

conjugué : $\bar{z} = a - i\,b$

module : $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z\,z'| = |z|\,|z'|$ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $|z^n| = |z|^n$

argument : $arg\,z = \theta$ tel que $\cos\theta = \frac{a}{r}$ $\sin\theta = \frac{b}{r}$

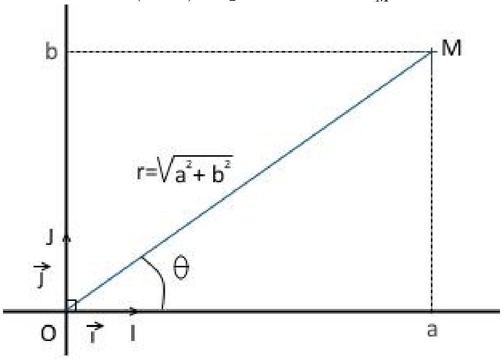
$arg(zz') = arg\,z + arg\,z'$ $arg\,\frac{z}{z'} = arg\,z - arg\,z'$

$arg\,z^n = n\,arg\,z$

forme trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

forme exponentielle : $z = r\,e^{i\theta}$

M de coordonnées $(a;b)$ a pour affixe $z_M = a + ib$



I milieu de [AB] a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$

$z_{k\vec{u}} = k\,z_{\vec{u}}$

$z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$

- **module, norme et longueur :**

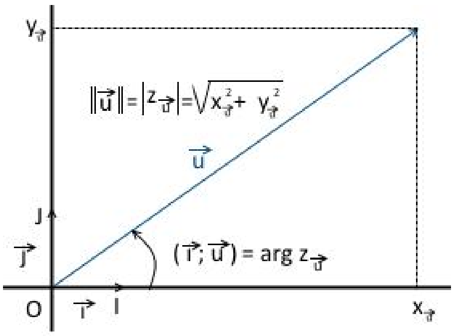
$|z_{\vec{u}}| = \|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}$

$|z_{\vec{AB}}| = |z_B - z_A| = \|\vec{AB}\| = AB$

- **argument et angle :**

$arg\,z_{\vec{u}} = (\vec{OI}\,;\vec{u}) = (\vec{i}\,;\vec{u})$

$arg\,\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = (\vec{AB};\vec{CD})$



Géométrie dans l'espace

Positions relatives de 2 droites :

- ➔ Droites non coplanaires
- ➔ Droites coplanaires
  - ➔ sécantes
  - ➔ parallèles (ou confondues)

Positions relatives d'une droite et d'un plan :

- ➔ Droite et plan sécant en 1 point
- ➔ Droite et plan parallèles
  - ➔ Droite distincte du plan
  - ➔ Droite incluse dans le plan

Positions relatives de 2 plans :

- ➔ Plans sécants en 1 droite
- ➔ Plans parallèles (ou confondus)

- **Parallélisme dans l'espace :**

Une droite est parallèle à un plan ⇔ elle est parallèle à une droite de ce plan

Deux plans sont parallèles ⇔ 2 droites sécantes de l'un sont parallèles à 2 droites sécantes de l'autre

- **Orthogonalité dans l'espace :**

Une droite est orthogonale à un plan ⇔ elle est orthogonale à 2 droites sécantes de ce plan ⇔ elle est orthogonale à toute droite de ce plan

2 droites sont orthogonales ⇔ il existe 2 droites coplanaires qui leur sont parallèles et qui sont perpendiculaires entre elles

- **Généralités vecteurs**

Un vecteur $\vec{u}$ caractérise une translation

B image de A par la translation $\vec{u}$, on note $\vec{AB} = \vec{u}$

et $\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = AB$

$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme

Relation de Chasles : $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme

$k\vec{u}$ est un vecteur de même direction que $\vec{u}$, de même sens si $k>0$ (opposé sinon) et de norme (longueur) $|k| \times \|\vec{u}\|$

$k(k'\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$

$(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u} \qquad k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k'\vec{v}$

- **Repérage**

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace :

$M\ (x_M ; y_M ; z_M) \Leftrightarrow \vec{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$

$\vec{u}\ (x_{\vec{u}} ; y_{\vec{u}} ; z_{\vec{u}}) \Leftrightarrow \vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j} + z_{\vec{u}}\vec{k}$

$\vec{u} + \vec{v}\ (x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} ; y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} ; z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}})$

$k\vec{u}\ (kx_{\vec{u}} ; ky_{\vec{u}} ; kz_{\vec{u}})$

$\vec{AB}\ (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$

I milieu de $[AB]$ $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2} ; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Si repère orthonormé :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

- **Colinéarité**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{v}$ avec $x \in \mathbb{R}$

A, B, C alignés $\Leftrightarrow \vec{AB}$ et $\vec{AC}$ colinéaires

$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \vec{AB}$ et $\vec{CD}$ colinéaires

$M \in (AB) \Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires

$M\ (x ; y ; z) \in d$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A

$\Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\ x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t\ y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t\ z_{\vec{u}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, représentation paramétrique

- **Produit scalaire**

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$

H projeté orthogonal de C sur (AB)

alors $\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH}$

si repère orthonormé : $\vec{u}.\vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}}z_{\vec{v}}$

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$\vec{u}.(k\vec{v}) = k \times (\vec{u}.\vec{v})$

- **Coplanarité**

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

A, B, C, D coplanaires $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ coplanaires

$M \in (ABC)$ $\Leftrightarrow$ $\vec{AM}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires

Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ est parallèle à un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires

- **Vecteur normal à un plan**

$\vec{n}$ vecteur normal à un plan

$\Leftrightarrow$ $\vec{n} \perp$ à 2 vecteurs non colinéaires du plan

$\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ colinéaire à un vecteur directeur d'une droite $\perp$ au plan

$M(x;y;z) \in P$ de vect. normal $\vec{u}\,(a;b;c)$ et passant par A

$\Leftrightarrow$ $\vec{AM}.\vec{u} = 0$

Si repère orthonormé : $\Leftrightarrow$ $ax + by + cz + d = 0$ avec d une constante fonction de A $\rightarrow$ équation cartésienne de P

Probabilités

Probabilités à loi discrète

- **Généralités**

$A = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; ... ; e_n\}$ $\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i)$

$\cap$ $\Leftrightarrow$ « ET » $\Leftrightarrow$ enchaînement sur un chemin de l'arbre

$\cup$ $\Leftrightarrow$ « OU » $\Leftrightarrow$ choix entre plusieurs chemins de l'arbre

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $\quad P(\Omega) = 1$ $\quad P(\varnothing) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A \cap B)$

Si A et B disjoints : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Loi équiprobable : $P(A) = \dfrac{nombre\ d'issues\ de\ A}{nombre\ d'issues\ de\ \Omega}$

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

On a aussi : $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$

Si A et B indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales :

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

Plus généralement $P(A)$ est la somme des probabilités des chemins de l'arbre pondéré qui mènent à A.

A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $P_A(B) = P(B)$

- **Variable aléatoire**

Variable qui prend des valeurs numériques en fonction des résultats de l'expérience aléatoire

« $X = k$ » est un événement dont les issues donnent la valeur k à la variable X et $P(X = k)$ en est la probabilité

Espérance de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i$

$E(aX + b) = aE(X) + b$

Variance de X : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times (x_i - E(X))^2$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(aX + b) = a^2 V(X)$

Écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

- **Loi binomiale**

Si une expérience avec 2 issues (1 succès de probabilité p et 1 échec) est répétée de manière <u>identique et indépendante</u> n fois, **Alors** X la variable aléatoire qui *donne le nombre de succès* sur ces n répétitions, suit une loi binomiale de paramètres n et p

Probabilité d'avoir k succès : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\binom{n}{k}$ = nombre de façons d'obtenir k succès parmi n répétitions

$E(X) = np$ $\quad V(X) = np(1-p)$ $\quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Probabilités à loi continue et échantillonnages

- **Généralités**

Soit I un intervalle du type $[a\,;b]$, $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;+\infty[$

I est l'ensemble infini des valeurs que peut prendre une variable aléatoire continue X

Soit c, $d \in I$, tel que $c<d$, $P(c\leq X\leq d) = \int_c^d f(x)dx$

f est appelée fonction densité sur I, continue, positive et l'aire sous la courbe sur I vaut 1. Elle dépend de la loi de probabilité.

- ***X* suit une loi uniforme**

Fonction densité sur $[a\,;b]$: $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$

$P(c\leq X\leq d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

$E(X) = \int_a^b x\,f(x)dx = \dfrac{a+b}{2}$

- ***X* suit une loi exponentielle**

Fonction densité sur $[0\,;+\infty[$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

avec $\lambda>0$

$P(c\leq X\leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

$P(X\leq d) = P(0\leq X\leq d) = 1-e^{-\lambda d}$

$P(X\geq c) = 1-P(X\leq c) = e^{-\lambda c}$

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Durée de vie sans vieillissement : $P_{X\geq t}(X\geq t+h) = P(X\geq h)$

avec $P_{X\geq t}(X\geq t+h) = \dfrac{P((X\geq t)\cap(X\geq t+h))}{P(X\geq t)} = \dfrac{P(X\geq t+h)}{P(X\geq t)}$

- ***X* suit une loi normale centrée réduite**

Fonction densité sur $]-\infty\,;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

$P(c\leq X\leq d)$:

Casio : OPTN → STAT → DIST → Norm → NormCD (c, d)

TI : 2nde → var → normalFRép (c, d)

$P(X\leq 0) = P(X\geq 0) = 0{,}5$ $\quad C_f$ symétrique par rapport à (OJ)

$E(X) = 0 \qquad \sigma(X) = 1$

$\alpha\in]0\,;1[$, il existe un unique $u_\alpha>0$: $P(-u_\alpha\leq X\leq u_\alpha) = 1-\alpha$

$u_{0,05}\simeq 1{,}96$ soit $P(-1{,}96\leq X\leq 1{,}96)\simeq 0{,}95$

$u_{0,01}\simeq 2{,}58$ soit $P(-2{,}58\leq X\leq 2{,}58)\simeq 0{,}99$

- **Théorème de Moivre-Laplace**

B est une variable aléatoire discrète qui suit une loi binomiale de paramètres n et p

N est une variable aléatoire continue qui suit une loi normale centrée réduite

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a\leq \frac{B-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq b\right) = P(a\leq N\leq b)$$

- ***X* suit une loi normale quelconque**

X suit une loi normale de paramètres μ et σ

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite

$E(X) = \mu \qquad \sigma(X) = \sigma$

$P(c\leq X\leq d)$:

Casio : OPTN → STAT → DIST → Norm → NormCD (c, d, σ, μ)

TI : 2nde → var → normalFRép (c, d, μ, σ)

$P(\mu-\sigma\leq X\leq\mu+\sigma)\simeq 0{,}683$

$P(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)\simeq 0{,}954$

$P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)\simeq 0{,}997$

p est la proportion d'un caractère dans la population

f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n

- **Intervalle de fluctuation asymptotique**

Au seuil de 95 % :

$I_n = \left[p-1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

Au seuil de 99 % :

$I_n = \left[p-2{,}58\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+2{,}58\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

Prise de décision :

Si $n\geq 30 \qquad np\geq 5 \qquad n(1-p)\geq 5$

$f\in I_n$ ⇒ la proportion p est acceptée au seuil de confiance de 95 % (ou 99 %)

$f\notin I_n$ ⇒ la proportion p est rejetée au seuil de confiance de 95 % (ou 99 %)

- **Intervalle de confiance**

Si $n\geq 30 \qquad nf\geq 5 \qquad n(1-f)\geq 5$

$p\in\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ au seuil de confiance de 95 %

Amplitude de l'intervalle de confiance : $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

Formulaire de calculs

- **Quotients**

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ $\qquad$ $\frac{a}{b} \div \frac{m}{p} = \frac{a}{b} \times \frac{p}{m}$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ $\qquad$ $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

$\frac{a \times m}{b \times m} = \frac{a}{b}$ $\qquad$ $\frac{a \div p}{b \div p} = \frac{a}{b}$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

- **Racines carrées**

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

- **Puissances**

$a^n \times b^n = (ab)^n$ $\qquad$ $a^n \times a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $\qquad$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{n \times m}$ $\qquad$ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

- **Fonctions trigonométriques**

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ $\qquad$ $\cos(-x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\qquad$ $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Factorisations

- **Facteur commun**

$\boldsymbol{a} \times b + \boldsymbol{a} \times c = \boldsymbol{a} \times (b+c)$

- **Identités remarquables**

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

- **Trinôme $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ avec $\boldsymbol{a, b, c \in \mathbb{R}}$**

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$

Factorisation dans $\mathbb{R}$:

$\Delta > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

avec $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Factorisation dans $\mathbb{C}$:

$\Delta < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

avec $x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$