Exercice de spécialité Antilles-Guyane septembre 2015

Partie A

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.
2. **a.** Donner un couple solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de cette équation.

   b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.
La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1. Coder la lettre N.
2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1\ [26]$.
3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y, alors x est le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26.
4. Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.
5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on?

Correction commentée

Partie A

1. D'après l'algorithme d'Euclide :

$51 = 26 \times 1 + 25$

$26 = 25 \times 1 + 1$

$25 = 1 \times 25 + 0$

donc $\text{PGCD}(51;26) = 1 \Leftrightarrow \text{PGCD}(51;-26) = 1$,

donc d'après le théorème de Bézout il existe u et v entiers relatifs tel que $51u - 26v = 1$.

2.a. En essayant des valeurs simples on trouve : $51 \times (-1) - 26 \times (-2) = 1$ donc le couple $(-1;-2)$ est solution.

2.b. Soit le couple $(x;y)$ solution de l'équation, alors :

$51x - 26y = 51 \times (-1) - 26 \times (-2)$

$\Leftrightarrow 51(x+1) = 26(y+2)$

51 divise $26(y+2)$ et $\text{PGCD}(51;26) = 1$ donc, d'après le théorème de Gauss, 51 divise $y+2$.

Ainsi $y + 2 = 51k \Leftrightarrow y = 51k - 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

En reportant dans l'équation, on obtient :

$51x - 26(51k - 2) = 1$

$\Leftrightarrow 51x = 51 \times 26k - 51 \Leftrightarrow x = 26k - 1$

Les couples solutions sont donc de la forme $(26k - 1 ; 51k - 2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

1. D'après l'énoncé $y \equiv 51x + 2 \ [26]$.

N correspond au nombre 13, soit $x = 13$. Ainsi $y \equiv 51 \times 13 + 2 \ [26]$

Or $51 \times 13 + 2 = 665 = 25 \times 26 + 15$

donc $y \equiv 15 \ [26]$

donc $y = 15$ car $0 \leqslant y \leqslant 25$

15 correspond à la lettre P, donc N est codée en P.

2. $51a \equiv 1 \ [26]$ donc, d'après la définition des congruences, il existe q entier relatif tel que :

$51a - 1 = 26q \Leftrightarrow 51a + 26q = 1$

D'après la partie A, a et $-q$ sont un couple solution de l'équation $51x - 26y = 1$,

donc il existe k entier relatif tel que $a = 26k - 1$

En prenant $k = 1$, on obtient $a = 25$.

On peut vérifier que $51a = 51 \times 25 = 1275$ et $1275 = 26 \times 49 + 1$, donc $51 \times 25 \equiv 1 \ [26]$.

3. Interprétons l'énoncé à l'aide des congruences. On cherche à démontrer que :

$y \equiv 51x + 2\ [26] \Rightarrow x \equiv 25y + 2\ [26]$

Au lieu d'isoler x comme avec une égalité (car la division n'est pas permise avec les congruences), on fait apparaître $25y$:

$y \equiv 51x + 2\ [26]$

$\Rightarrow 25y \equiv 25 \times 51x + 50\ [26]$ (seule l'implication est possible car la réciproque nécessite une division)

$\Leftrightarrow 25y \equiv x + 50\ [26]$ (car $51 \times 25 \equiv 1\ [26] \Rightarrow 25 \times 51x \equiv x\ [26]$ d'après la question 2.)

$\Leftrightarrow x \equiv 25y - 50\ [26]$

$\Leftrightarrow x \equiv 25y + 2\ [26]$

4. N correspond au nombre 13, soit $x = 13$.

Or d'après la question 3. :

$13 \equiv 25y + 2\ [26] \Rightarrow y \equiv 51 \times 13 + 2\ [26]$

$\Leftrightarrow y \equiv 665 \equiv 15\ [26]$

Ainsi $y = 15$, ce qui correspond à la lettre P. N est donc décodée en P.

5. On regarde les premières étapes :

$f(x) \equiv 51x + 2\ [26]$

$f(f(x)) \equiv 51 \times f(x) + 2 \equiv 51(51x + 2) + 2 \equiv 51^2 x + 104 \equiv 51^2 x\ [26]$

Or $51^2 = 2601 = 26 \times 100 + 1$, donc $51^2 \equiv 1\ [26]$,

donc $f(f(x)) \equiv 51^2 x \equiv x\ [26]$

Au bout de 100 applications, on a 50 fois 2 applications qui donnent chacune x, ce qui fait au final x.

La lettre codée au bout de 100 applications est donc la lettre de départ.