Exercice de spécialité Liban juin 2017

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7\,a_8\,a_9\,a_{10}\,a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\,a_{15}\,c$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

```
Initialisation : I prend la valeur 0
                 | P prend la valeur 0
                 | R prend la valeur 0
Traitement :     Pour k allant de 0 à 7 :
                 R prend la valeur du reste de la division euclidienne de 2a_{2k+1} par 9
                 I prend la valeur I + R
                 Fin Pour
                 Pour k allant de 1 à 7 :
                 | P prend la valeur P + a_{2k}
                 Fin Pour
                 S prend la valeur I + P + c
Sortie :         Si S est un multiple de 10 alors :
                 | Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
                 Sinon :
                 | Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
                 Fin Si
```

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

- **a.** Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.
- **b.** Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.
- **c.** On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.
  Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu
  $6a35$ 4002 9561 3411 reste correct ?

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.
On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.
Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

Annexe

Exercice 4 – Question 1. a.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

Correction commentée

1.a.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

1.b. D'après l'algorithme, le numéro de la carte est correct si S est un multiple de 10. Or $S = I + P + c$.

D'après le tableau précédent $I = 26$.

$P = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} = 6 + 5 + 0 + 2 + 5 + 1 + 4 = 23$

et $c = 1$ (le dernier chiffre).

Ainsi $S = 26 + 23 + 1 = 50$ qui est un multiple de 10, donc le numéro de carte est correct.

1.c. a_1 initialement à 5 devient 6, donc $2a_1$ devient 12 et le reste de la division de 12 par 9 est 3. Dans la première colonne du tableau précédent R passe de 1 à 3, ce qui ajoute 2 à I, qui passe de 26 à 28.

Pour compenser, il faut donc retirer 2 à a_2, qui passe donc de 6 à 4.

Donc $a = 4$ et le nouveau numéro est donc 6435 4002 9561 3411.

2. $I + P$ donne un nombre dont le reste de la division euclidienne par 10 est un entier r unique compris entre 0 et 9.

On a donc $I + P \equiv r \ [10]$

Cherchons c compris entre 0 et 9 tel que $I + P + c \equiv 0 \ [10]$ soit $r + c \equiv 0 \ [10]$

- Si $r = 0$ alors $c \equiv 0 \ [10]$

  Donc seul $c = 0$ convient parmi les chiffres de 0 à 9.

- Si $r \neq 0$ alors $c \equiv -r \equiv 10 - r \ [10]$

  $1 \leq r \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq 10 - r \leq 9$

  Donc seul $c = 10 - r$ convient parmi les chiffres de 0 à 9.

Dans tous les cas il existe une clé c (nombre entier compris entre 0 et 9), unique, tel que $I + P + c \equiv 0 \ [10]$.

3. Soit un numéro de carte correct, composé de chiffres identiques. Posons n ce chiffre. On a donc pour tout i compris entre 1 et 15 $a_i = n$ et $c = n$.

Soit r le reste de la division euclidienne de $2n$ par 9. On a ainsi :

$2n \equiv r \ [9]$ et donc $I = 8r$

Ainsi : $S = 8r + 7n + n = 8r + 8n = 8(r + n)$

Ci-dessous le tableau qui donne les résultats possibles pour S modulo 10 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r \equiv 2n \ [9]$	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0
$S \ [10]$	0	4	8	2	6	8	2	6	0	2

Seules les valeurs de $n = 0$ ou $n = 8$ donnent une valeur de S multiple de 10.

Les numéros de cartes corrects sont donc : 0000 0000 0000 0000 et 8888 8888 8888 8888.

4. Prenons le code de l'énoncé où le chiffre 1 apparaît en plusieurs positions. On sait que ce code est correct.

5635 4002 956**1 3**411 permute en 5635 4002 956**3 1**411 qui donne un S valant 48, donc le code est incorrect.

5635 4002 9561 3**41**1 permute en 5635 4002 9561 3**14**1 qui donne un S valant 53, donc le code est incorrect.

Dans les 2 cas, le code est incorrect et le chiffre qui permute avec 1 est différent. Donc on ne peut pas retrouver la valeur du chiffre permuté.

Question bonus :

Connaissant la parité du rang du chiffre 1 et la congruence de S du code permuté modulo 10, peut-on retrouver le chiffre qui a permuté avec 1 ?

Prenons un numéro correct qui contient 1.

Si 1 est le chiffre de **rang impair**, il compte pour 2 dans S, puisque le reste de la division par 9 de 2×1 vaut 2. En le permutant il devient un chiffre de rang pair et donc il compte pour 1 dans S. S perd donc une unité.

Posons n le chiffre de rang pair qui permute avec 1. En le permutant, on retranche à S la valeur n puis on ajoute le reste de la division par 9 de $2n$. On a le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2n\ [9]$	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0
S permuté $[10]$	9	0	1	2	3	5	6	7	8	0

Seules les valeurs de n différentes de 1 et 9 donnent un numéro permuté incorrect qui n'est pas multiple de 10.

Si l'on connaît la congruence de S du code permuté, on peut donc retrouver le chiffre avec qui il a permuté, puisque chaque S permuté varie différemment.

Si 1 est le chiffre de **rang pair**, on a le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2n\ [9]$	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0
S permuté $[10]$	1	0	9	8	7	5	4	3	2	0

Exemple avec le numéro donné dans l'énoncé :

5635 4002 956**1 3**411 donne un S qui vaut 50 avec un chiffre 1 de rang pair.

Après permutation 5635 4002 956**3 1**411 donne un S qui vaut $48 \equiv 8\ [10]$

D'après le second tableau le chiffre permuté est donc 3.

5635 4002 9561 3**41**1 donne un S qui vaut 50 avec un chiffre 1 de rang impair.

Après permutation 5635 4002 9561 3**14**1 donne un S qui vaut $53 \equiv 3\ [10]$

D'après le premier tableau le chiffre permuté est donc 4.