Exercice de divisibilité

Exercice

Montrer que si n est un multiple de 5 alors $4^{4n+2} - 3^{3n+3}$ est divisible par 11.

Correction

n est un multiple de 5 $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 5k$

Ainsi $4^{4n+2} - 3^{3n+3} = 4^{20k+2} - 3^{15k+3}$

Cherchons alors une puissance de 4 congrue à 1 modulo 11 :

$4^2 \equiv 16 \equiv 5 \;[11]$

$4^3 \equiv 20 \equiv 9 \;[11]$

$4^4 \equiv 36 \equiv 3 \;[11]$

$4^5 \equiv 12 \equiv 1 \;[11]$

Ainsi $4^{20k} \equiv (4^5)^{4k} \equiv 1 \;[11]$

Et donc $4^{20k+2} \equiv 16 \equiv 5 \;[11]$

De même, cherchons une puissance de 3 congrue à 1 modulo 11 :

$3^2 \equiv -2 \;[11]$

$3^3 \equiv 5 \;[11]$

$3^4 \equiv 15 \equiv 4 \;[11]$

$3^5 \equiv 12 \equiv 1 \;[11]$

Ainsi $3^{15k} \equiv (3^5)^{3k} \equiv 1 \;[11]$

Et donc $3^{15k+3} \equiv 27 \equiv 5 \;[11]$

En rassemblant les deux expressions, on a donc : $4^{4n+2} - 3^{3n+3} \equiv 4^{20k+2} - 3^{15k+3} \equiv 5 - 5 \equiv 0 \;[11]$

Ainsi : $4^{4n+2} - 3^{3n+3}$ est divisible par 11