Exercice probabilité Bac S Métropole 2012

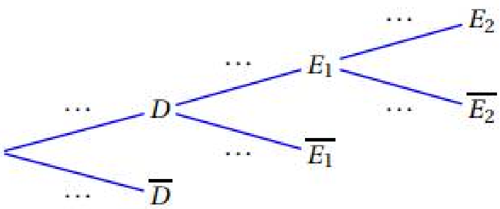
EXERCICE **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier.
40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.
Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus.
Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
   On considère les évènements suivants :
   — D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   — E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   — E_2 : « Le candidat est recruté ».

   a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   b. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

   c. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

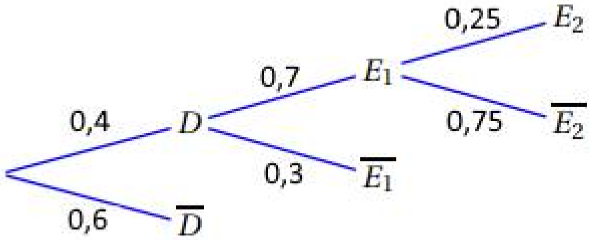
   a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

   b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

Correction commentée

1. a. Les pourcentages sont traduits en probabilité :



1. b. D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(E_1) = P(E_1 \cap D) + P(E_1 \cap \overline{D})$

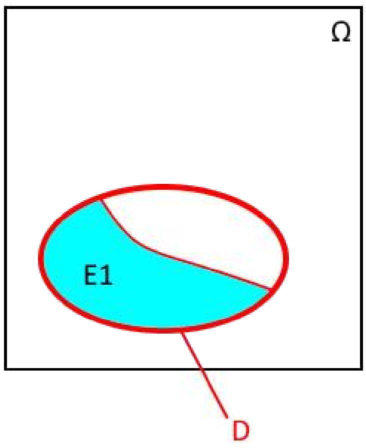
Or $E_1 \cap \overline{D}$ est l'événement : « le candidat est écarté sur dossier et retenu lors du premier entretien », ce qui est impossible, donc $E_1 \cap \overline{D} = \emptyset$, soit l'événement impossible, donc $P(E_1 \cap \overline{D}) = 0$

ainsi, $P(E_1) = P(E_1 \cap D) = P(D) \times P_D(E_1) = 0{,}4 \times 0{,}7$

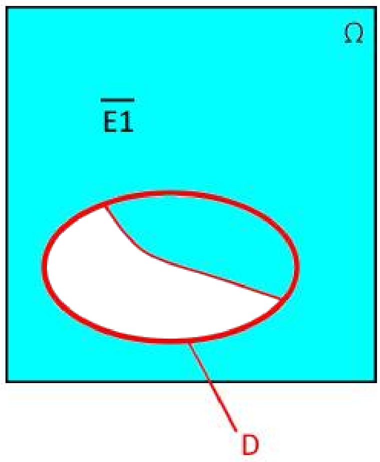
soit $\boxed{P(E_1) = 0{,}28}$

1. c. $P(F) = P(\overline{D} \cup (D \cap \overline{E_1}) \cup (E_1 \cap \overline{E_2}))$

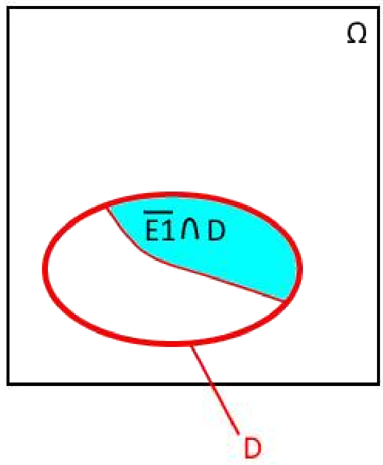
Attention à bien interpréter les événements contraires ! $\overline{E_1}$ ne signifie pas « échouer au premier entretien », mais « ne pas être retenu au premier entretien », ce qui signifie échouer au premier entretien ou ne pas être retenu sur dossier.



E_1 est inclus forcément dans D, par définition



$\overline{E_1}$ contient $\overline{D}$ et une partie de D



$\overline{E_1} \cap D$ est l'événement « échouer au premier entretien »

Pour désigner l'événement « échouer au premier entretien », on note donc $D \cap \overline{E_1}$.

De même $\overline{E_2}$ ne signifie pas « échouer au second entretien » mais « ne pas être recruté », qui recouvre plusieurs possibilités : le refus du dossier, l'échec au premier entretien ou au second entretien.

$E_1 \cap \overline{E_2}$ est donc l'événement « être retenu au premier entretien et ne pas être recruté » donc précisément « échouer au second entretien ».

$\overline{D}$, $D \cap \overline{E_1}$ et $E_1 \cap \overline{E_2}$ sont incompatibles parce qu'on ne peut pas échouer par 2 ou 3 moyens différents,

donc $P(F) = P(\overline{D} \cup (D \cap \overline{E_1}) \cup (E_1 \cap \overline{E_2})) = P(\overline{D}) + P(D \cap \overline{E_1}) + P(E_1 \cap \overline{E_2})$

$\Leftrightarrow \; P(F) = P(\overline{D}) + P(D) \times P_D(\overline{E_1}) + P(E_1) \times P_{E_1}(\overline{E_2})$

$\Leftrightarrow \; P(F) = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}28 \times 0{,}75$

$\Leftrightarrow \; \boxed{P(F) = 0{,}93}$

2. a. Choisir un candidat est une expérience aléatoire à 2 issues possibles : un succès « recruter le candidat » de probabilité 0,07 et un échec sinon.
On répète 5 fois cette expérience de manière identique et indépendante.
La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès sur ces répétitions suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0{,}07$.

2. b. $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}07^2 \times 0{,}93^3$

- $\binom{5}{2}$ est le coefficient binomial donnant le nombre de façons (chemins dans l'arbre) d'obtenir 2 succès parmi 5 répétitions.
- $0{,}07^2 \times 0{,}93^3$ donne la probabilité d'un chemin où 2 branches donnent un succès de probabilité 0,07 et 3 branches un échec de probabilité 0,93.

Ainsi $\boxed{P(X = 2) \simeq 0{,}039}$

3. Soit n le nombre de dossiers minimum et X la variable aléatoire qui donne le nombre de candidats recrutés (succès) parmi ces n dossiers (répétitions). X suit une loi binomiale et embaucher au moins un candidat parmi les n dossiers est donc l'événement $X \geq 1$.
On pose : $P(X \geq 1) \geq 0{,}999$
$\Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0{,}999$
$\Leftrightarrow \quad P(X = 0) \leq 0{,}001$
$\Leftrightarrow \quad 0{,}93^n \leq 0{,}001$

Sans les logarithmes

Dans un tableur on obtient :

Pour $0{,}93^{95} \simeq 1{,}01 \times 10^{-3}$

et $0{,}93^{96} \simeq 9{,}43 \times 10^{-4}$

Ainsi $\boxed{0{,}93^n \leq 0{,}001 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 96}$

Avec les logarithmes

$0{,}93^n \leq 0{,}001$

$\Leftrightarrow \quad n \times \ln(0{,}93) \leq \ln(0{,}001)$

$\Leftrightarrow \quad n \geq \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}93)}$ car $\ln(0{,}93) < 0$

Or $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}93)} \simeq 95{,}2$

Donc $\boxed{0{,}93^n \leq 0{,}001 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 96}$

Ainsi le cabinet de recrutement doit traiter au minimum 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.