Analyse de fonctions - logarithme - exponentielle - intégrales

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2(x-1)e^x+1$.

1) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

   b) Calculer la fonction dérivée f' puis étudier son signe.

   c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ puis préciser $f(0)$.

2) a) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement 2 solutions sur $\mathbb{R}$.

   b) On note α la solution négative de l'équation $f(x)=0$ et β la solution positive de cette équation.

   Donner une valeur approchée de α et β à 10^{-3} près.

3) a) Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=2e^x(x-2)+x$ est une primitive de f.

   b) Calculer $\int_1^2 f(x)\,dx$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=2\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ et C_g la courbe représentative de g.

1) a) Démontrer que la fonction g admet une asymptote horizontale dont on donnera une équation.

   b) Étudier les variations de g sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

   c) Démontrer que g est positive sur $[0;+\infty[$.

2) a) Donner une équation de la tangente à C_g à l'origine.

   b) Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote donnée au 1.a.

3) a) Vérifier que la fonction G définie sur $[0;+\infty[$ par $G(x)=\ln(e^{4x}+1)-2x$ est une primitive de g.

   b) Montrer que l'aire sous la courbe C_g limitée par l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\dfrac{\ln 2}{2}$ vaut $\ln\dfrac{5}{4}$ unités d'aire.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\ln x$. On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

   b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution $\alpha_n\in]0;+\infty[$.

   b) Préciser la valeur de α_1.

   c) Démontrer, à l'aide du sens de variation de f, que la suite (α_n) est strictement croissante.

3) a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point d'abscisse 1.

   b) Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\ln x-x+1$.

   En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

4) a) A l'aide des résultats de la question 3, démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2}\le\alpha_n$.

   b) Déterminer la limite de la suite (α_n).