

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1

On définit une suite (u_n) par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. On pose pour tout n entier naturel $v_n = u_n - 4n + 10$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 .
3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, en précisant sa raison et son premier terme.
4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
6. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
 - a. Déterminer w_n tel que $u_n = v_n + w_n$ et donner la nature de cette suite.
 - b. En déduire une expression de S_n en fonction de n .

Exercice 2

En mélangeant 1L d'eau à la température T et 1L d'eau à la température T' , on obtient 2L à la température $\frac{T+T'}{2}$.

On dispose d'1L d'eau à la température $T_0 = 80^\circ\text{C}$; on lui ajoute 1L d'eau à la température 20°C ; on obtient 2L à la température T_1 .

On prélève alors 1L sur les deux obtenus, auquel on ajoute 1L d'eau à la température 20°C ; on obtient 2L à la température T_2 . On répète le processus et on fabrique ainsi une suite (T_n) telle que T_{n+1} est la température du mélange d'1L d'eau à la température T_n et d'1L d'eau à la température 20°C .

1. Calculer T_1, T_2 et T_3 , puis exprimer T_{n+1} en fonction de T_n .
2. Soit la suite (u_n) telle que pour tout n , $u_n = T_n - 20$.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
 - b. Exprimer u_n en fonction de l'entier n .
 - c. En déduire que pour tout n , $T_n = 20 + \frac{60}{2^n}$.
3. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le premier rang n à partir duquel $T_n \leq 21$. Interprétez selon l'énoncé.

Exercice 3

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23% de son intensité lumineuse.

1. Soit I_0 l'intensité d'un rayon lumineux à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à la sortie.

Exprimer I_1 en fonction de I_0 .

2. On superpose n plaques de verre identiques ; on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la n -ième plaque.

- a. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} .
- b. Quelle est la nature de la suite I_n ? Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et de I_0 .
- c. Quel est le sens de variation de I_n ?

3. Quelle est l'intensité initiale d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?

4. Déterminer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante ?