Exercices généraux pour la Terminale S

Entraînement à la prise d'initiatives

Analyse

Suites numériques

Exercice 1

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0;1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$

Étudier le comportement des deux suites (u_n) et (v_n) en $+\infty$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $u_n = 111\ldots$ avec n chiffres.

Démontrer que $u_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

Exercice 3

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$ est convergente.

Exercice 4

Quelle est la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$u_1 = 0{,}57$, $u_2 = 0{,}5757$, … , $u_n = 0{,}575757\ldots$ avec $2n$ chiffres

Généralités sur les fonctions

Exercice 5

Soit f une fonction définie et continue de l'intervalle $[0;1]$ dans lui-même.

Montrer qu'il existe un réel α de l'intervalle $[0;1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. α est appelé point fixe de f .

Exercice 6

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout réel x , $f(10x) = f(x)$.

L'objectif est de démontrer qu'une telle fonction est constante sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x , la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(\dfrac{x}{10^n}\right)$ est constante.
2. Calculer la limite de la suite (u_n) de deux manières et conclure.

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points $A(1;2)$ et $P(\alpha;0)$ où α désigne un réel strictement supérieur à 1. La droite (AP) coupe l'axe des ordonnées en Q .

Déterminer α pour que l'aire du triangle OPQ soit minimale. Que vaut cette aire ?

Exercice 8

En utilisant la propriété suivante : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$

1. Démontrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h} = 0$
2. En déduire que $\sin' = \cos$

Fonction exponentielle

Exercice 9

Soit C_k la courbe représentative de f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = e^{kx}$. Pour tout M point de C_k, on note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et T l'intersection de la tangente en M avec l'axe des abscisses.
Montrer que la longueur TH ne dépend pas du point M choisi.

Exercice 10

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ avec $a > 0$ et $b > 0$

Fonction logarithme

Exercice 11

Montrer que, quels que soient x et y strictement positifs, $\dfrac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Primitives et intégrales

Exercice 12

A l'aide de la dérivée de la fonction $f(x) = xe^x$, déterminer sa primitive.

Exercice 13

Démontrer que la suite (I_n) définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ pour tout n de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ converge vers 0.

Géométrie

Les complexes

Exercice 14

Soit Z un complexe de module 1. Montrer que $Z + \dfrac{1}{Z}$ est un nombre réel.

Géométrie dans l'espace

Exercice 15

Soit $SABCD$ une pyramide de sommet S dont la base est un carré de côté 1. $[SA]$ est perpendiculaire au plan (ABC), de longueur 1.
Déterminer le point M de $[SC]$ tel que $\widehat{BMD}$ soit maximal.

Probabilités

Probabilités discrètes

Exercice 16

7 % de la population est atteinte d'une maladie. Un test est mis au point pour détecter cette maladie :

- Lorsqu'une personne est malade, le test est positif dans 89 % des cas
- Lorsqu'une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 97 % des cas

Déterminer la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

Exercice 17

On répète n épreuves de Bernoulli avec n fixé. On appelle X le numéro du premier succès rencontré. On pose $X=0$ s'il n'y a aucun succès rencontré.

Démontrer que $\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = 1$

Probabilités à densité

Exercice 18

X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Déterminer λ pour que la probabilité $P(1 \leq X \leq 2)$ soit maximale.