Introduction aux limites de fonctions

1. Définition de la limite d'une fonction

Une fonction est le lien entre 2 quantités qui évoluent ensemble. L'intérêt est qu'à partir de l'une on peut connaître l'autre. La première quantité constitue les **antécédents** et la seconde les **images**.
La particularité d'une fonction est qu'à un antécédent est associé une seule image. Mais plusieurs images peuvent avoir plusieurs antécédents.

Exemples :

> La **longueur** du côté d'un carré avec son **aire**
> La **pression** atmosphérique avec l'**altitude**
> La **vitesse** d'une voiture avec le **temps** qui passe (ici le temps correspond aux antécédents et la vitesse aux images car il n'existe qu'une seule vitesse pour un instant donné.)

On peut s'interroger sur l'évolution des images lorsque les antécédents évoluent. Par exemple, quelle est la pression atteinte lorsque l'altitude devient de plus en plus grande, ou quelle vitesse est atteinte au bout d'un temps très long ? Cette question fait l'objet de l'étude de la **limite**.

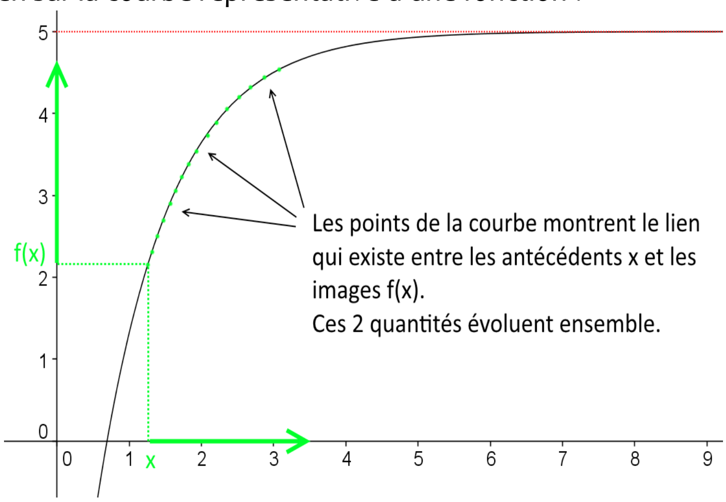
Définition *intuitive*

La limite d'une fonction est la valeur b (si elle existe) vers laquelle se rapprochent les images lorsque les antécédents se rapprochent d'une valeur a .

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et on lit « limite quand x tend vers a de $f(x)$ égal b »

a et b sont des nombres réels ou les symboles $+\infty$ ou $-\infty$ (ces symboles désignent un horizon de nombres aussi éloignés de zéro que l'on veut dans les positifs ou les négatifs)

La limite se perçoit bien sur la courbe représentative d'une fonction :



Dans l'exemple ci-dessus, lorsque les antécédents sur l'axe des abscisses « augmentent » vers l'infini, les points de la courbe « se déplacent » en conséquence, et les images correspondantes sur l'axe des ordonnées « se rapprochent » de 5. On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

Il existe 4 types de limites :

- La limite infinie à l'infini : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ($+\infty$ peut être remplacé par $-\infty$)
- La limite finie à l'infini : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (où l est un réel)

  La courbe représentative de f présente alors une **asymptote horizontale** d'équation $y = l$.
  L'asymptote est une droite vers laquelle se rapproche la courbe (comme dans l'exemple graphique précédent)
- La limite infinie en un réel : $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (où a est un réel et $+\infty$ peut être remplacé par $-\infty$)

  La courbe représentative de f présente alors une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.
- La limite finie en un réel : $\lim_{x \to a} f(x) = l$ (où l est un réel)

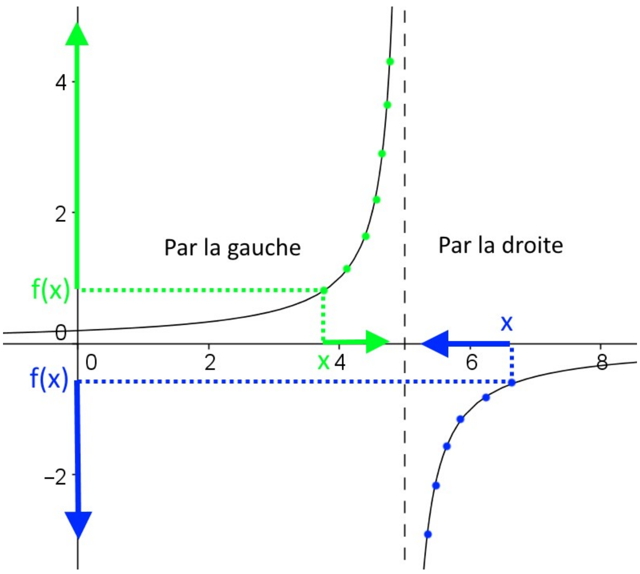
Remarque : Pour les limites en un réel (les 2 derniers types), les antécédents x peuvent s'approcher de a de 2 façons : soit par la droite, soit par la gauche. On précise alors la façon de faire par cette notation :

- Par la gauche : $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$

et se lit « limite de $f(x)$ à gauche quand x tend vers a » ou « limite de $f(x)$ quand x tend vers a par valeurs inférieures »

- Par la droite : $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$

et se lit « limite de $f(x)$ à droite quand x tend vers a » ou « limite de $f(x)$ quand x tend vers a par valeurs supérieures»
Si la limite à gauche et à droite sont les mêmes on note plus simplement : $\lim_{x \to a} f(x)$



Dans l'exemple ci-dessus, les points en vert de la courbe se rapprochent de l'asymptote d'équation x=5 par la gauche et les points en bleu de la courbe se rapprochent de cette même asymptote par la droite. Mais les points empruntent deux directions différentes, les verts vers le haut et les bleus vers le bas.

On note alors : $\lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} f(x) = -\infty$

2. Détermination de la limite d'une fonction

Comme la limite est une valeur vers laquelle se rapprochent les images d'une fonction, on peut déterminer une limite intuitivement comme pour chercher une image.

Exemples :

- Quelle est la limite de la fonction $f(x)=3x+1$ lorsque x tend vers $+\infty$?

$+\infty$ n'est pas un nombre, il indique un horizon de nombres qui n'est jamais atteint. On peut intuitivement le considérer comme un nombre positif dont la distance à zéro (valeur absolue) est très grande.
Ainsi lorsque x est un très grand nombre positif (aussi grand que l'on veut), son image $f(x)$, calculée à partir de la formule $3x+1$ est aussi un très grand nombre positif, évoluant de la même manière.
On en conclut que $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note : $\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$

- Quelle est la limite de la fonction $f(x)=\frac{1}{x-1}$ lorsque x tend vers 2 ?

Lorsque x se rapproche de 2, le calcul de $f(x)$ donne un résultat qui se rapproche de $\frac{1}{2-1}=1$
On note alors : $\lim_{x \to 2} f(x)=1$

Justification rigoureuse

Les fonctions définies par une formule de calcul comme dans les 2 exemples précédents sont le résultat d'opérations avec des fonctions simples appelées fonctions usuelles. Il est tout d'abord important de connaître les limites de ces fonctions usuelles qui sont prouvées formellement (non traité ici).
La connaissance des courbes représentatives aident beaucoup à s'en rappeler.

	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$	$x \to 0$ à gauche	$x \to 0$ à droite
limite de $f(x)=k$ avec $k \in \mathbb{R}$	k	k	k	k
limite de $f(x)=x^p$ avec p entier et $p \geq 1$	$+\infty$	$+\infty$ si p est pair $-\infty$ si p est impair	0	0
limite de $f(x)=\sqrt{x}$	$+\infty$	Non défini	Non défini	0
limite de $f(x)=\frac{1}{x}$	0	0	$-\infty$	$+\infty$

Pour les limites en un réel a (positif pour la fonction racine carré) autre que 0, on a pour ces fonctions usuelles : $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

Des propriétés sur les opérations de limites sont alors à connaître pour « assembler » ces fonctions usuelles en fonctions élaborées. Les démonstrations de ces propriétés ne sont pas traitées ici.
Ces propriétés se comprennent **à partir des opérations connues sur les nombres.**

- **Pour la somme :**

La limite d'une somme est égal à la somme des limites quand le résultat peut être déterminé par calcul ou intuitivement.

La seule exception est pour la somme de deux fonctions qui tendent l'une vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$. On parle alors de **forme indéterminée**.

Tableau récapitulatif de la limite d'une somme :

limite de f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
limite de $f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI *

* Forme indéterminée

Exemple :

Quelle est la limite en $+\infty$ de $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$?

D'après les limites des fonctions usuelles : $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$

Donc par **somme** : $\lim_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{x}=+\infty$

Remarque : Intuitivement, en prenant pour $+\infty$ un nombre aussi grand que l'on veut auquel on additionne 0, le résultat donne un très grand nombre.

- **Pour le produit :**

La limite d'un produit est égal au produit des limites quand le résultat peut être déterminé par calcul ou intuitivement.

La seule exception est pour le produit de deux fonctions qui tendent l'une vers $+\infty$ (ou $-\infty$) et l'autre vers 0. C'est une **forme indéterminée.**

Tableau récapitulatif de la limite d'un produit:

limite de f	l	$l\neq 0$	0	∞
limite de g	l'	∞	∞	∞
limite de $f\times g$	$l\times l'$	∞ *	FI **	∞ *

* appliquer la règle des signes pour le signe du produit ** Forme indéterminée

Exemple :

◆ Quelle est la limite en 0 de $f(x)=x\sqrt{x}$?

D'après les limites des fonctions usuelles : $\lim_{x\to0} x=0$ et $\lim_{x\to0} \sqrt{x}=0$

Donc par *produit* : $\lim_{x\to0} x\sqrt{x}=0$

◆ Quelle est la limite en $+\infty$ de $f(x)=-3\sqrt{x}$?

D'après les limites des fonctions usuelles : $\lim_{x\to+\infty} -3=-3$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

Donc par **produit** : $\lim_{x\to0} -3\sqrt{x}=-\infty$ (le résultat est négatif par produit d'un négatif avec un positif)

- **Pour le quotient :**

La limite d'un quotient est égal au quotient des limites quand le résultat peut être déterminé par calcul ou intuitivement.

Les deux exceptions sont pour le quotient de deux fonctions qui tendent ensemble vers l'infini ou ensemble vers zéro. Ce sont des ***formes indéterminées****.*

Pour déterminer le résultat, on peut utiliser la signification d'une division :

- soit donne le nombre de répétitions d'un nombre dans un autre (15/3 = 5 donc 3 est répété 5 fois)
- soit donne la valeur d'une part dans le partage égal d'un nombre (15/3 partage en 3 et 1 part vaut 5)

Tableau récapitulatif de la limite d'un quotient :

limite de f	$l\neq 0$			0			∞		
limite de g	$l'\neq 0$	0	∞	$l'\neq 0$	0	∞	$l'\neq 0$	0	∞
limite de $\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	∞ *	0	0	FI **	0	∞ *	∞ *	FI **

* appliquer la règle des signes pour le signe du quotient ** Forme indéterminée

Exemple :

◆ Quelle est la limite en $+\infty$ de $f(x)=\frac{x^{-1}}{x^2+1}$?

D'après les limites des fonctions usuelles : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1=+\infty$

Donc par **quotient** : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{x^2+1}=0$

Intuitivement, la valeur d'une part lorsque zéro a été partagé en un nombre infini de parties égales vaut zéro.

◆ Quelle est la limite en 1 de $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$?

Pour le numérateur, d'après les limites des fonctions usuelles et **somme** : $\lim\limits_{x\to 1} x+1=2$

Pour le dénominateur, quand $x>1$ alors $x-1>0$ et quand $x<1$ alors $x-1<0$.

Ce qui signifie que le signe de $x-1$ change selon que x s'approche de 1 par la droite ou par la gauche.

On distingue alors deux limites :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x-1=0^-$ (0^- signifie que $x-1$ s'approche de 0 du côté des **négatifs** car alors $x-1<0$)

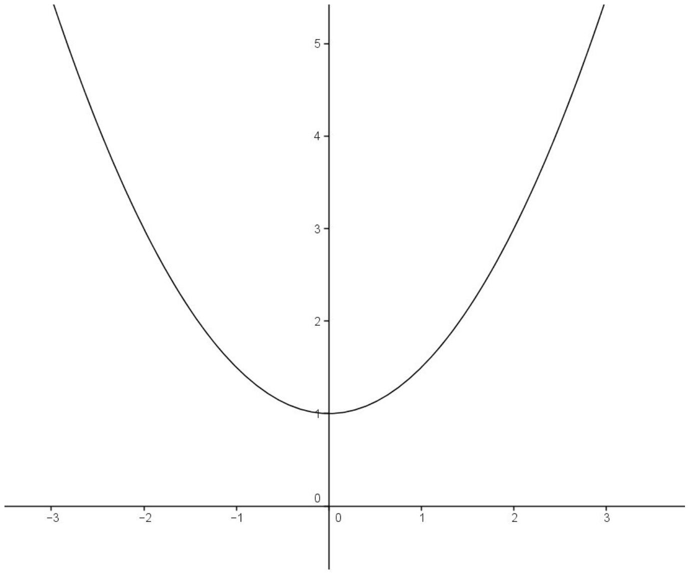
et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1=0^+$ (0^+ signifie que $x-1$ s'approche de 0 du côté des **positifs** car alors $x-1>0$)

Donc par **quotient** : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x+1}{x-1}=-\infty$ et de même : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$ (en utilisant la règle des signes)

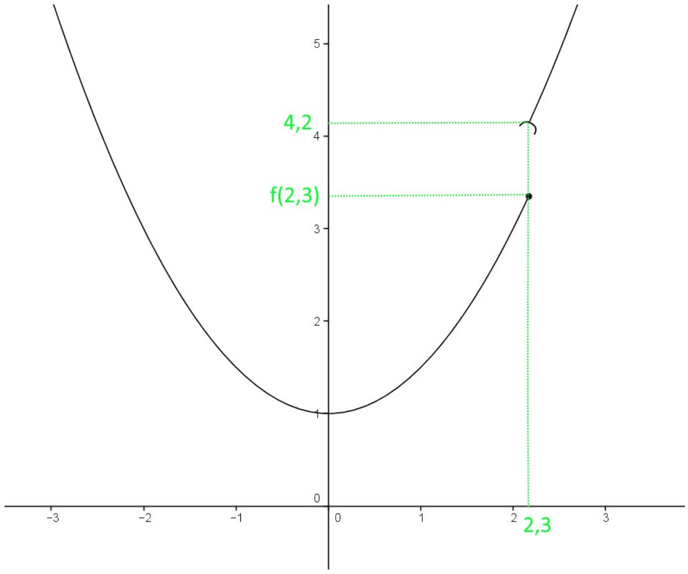
Intuitivement, le nombre de fois que 0 (c'est à dire une quantité aussi proche de zéro que l'on veut) est répété dans 2 est infini.

3. Continuité d'une fonction

La continuité d'une fonction se représente bien par le tracé de sa courbe représentative. Si le tracé se fait sans lever le crayon alors la fonction est **continue sur l'intervalle** considéré.



Courbe d'une fonction continue sur l'intervalle $[-3;3]$



Courbe d'une fonction discontinue sur $[-3;3]$
Le point $(2{,}3;4{,}2)$ *est exclu de la courbe, car* $4{,}2$ *n'est l'image d'aucun antécédent sur* $[-3;3]$

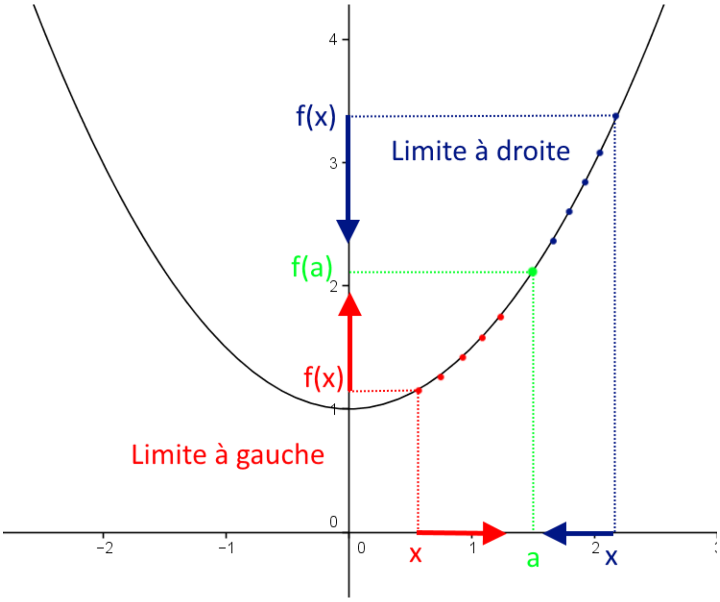
Formellement la continuité sur un intervalle I est défini ainsi :

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est continue sur I, si et seulement si :

Pour tout a de I, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$ et on note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Autrement dit, la limite de la fonction en chaque valeur de son intervalle de définition est atteinte par la fonction.



Justification rigoureuse

Pour justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle, il suffit de prouver que la fonction est le résultat d'opérations entre des fonctions usuelles continues sur cet intervalle (fonctions polynômes, inverse, racine carré, valeur absolue, cosinus et sinus sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition)

Exemple :

La fonction $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$ est-elle continue sur $]1;+\infty[$?

$x \to x-1$ est continue sur $]1;+\infty[$ car fonction affine

$x \to \sqrt{x}$ est continue sur $]1;+\infty[$ car fonction racine carré

Par **composition** la fonction $x \to \sqrt{x-1}$ est continue sur $]1;+\infty[$

$x \to x^2-1$ est continue sur $]1;+\infty[$

Par **quotient** f est donc continue sur $]1;+\infty[$

4. Théorème des valeurs intermédiaires

Grâce aux limites et à la continuité définies précédemment on peut énoncer le théorème des valeurs intermédiaires de la façon suivante :

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $]a;b[$ où a et b désignent un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$.

On suppose que f admet des limites finies ou infinies en a et b .

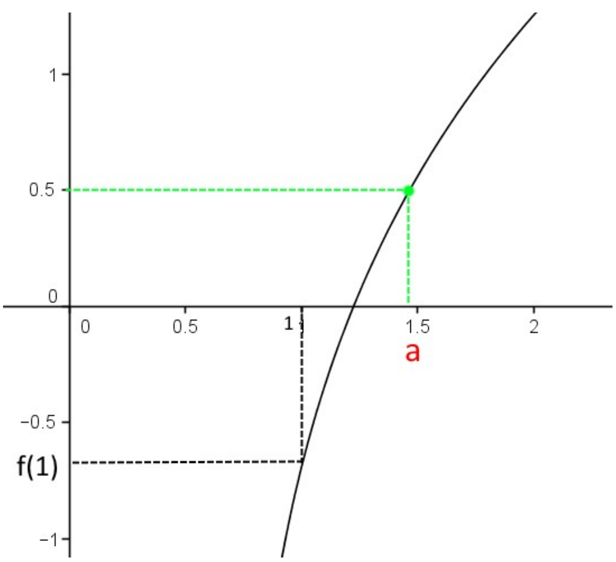
Alors, pour tout réel k de l'intervalle $]\lim\limits_{x\to a} f(x);\lim\limits_{x\to b} f(x)[$ ou $]\lim\limits_{x\to b} f(x);\lim\limits_{x\to a} f(x)[$ selon l'ordre des limites qui dépend de la variation (croissante ou décroissante) de la fonction,

l'équation $f(x)=k$ admet une **unique** solution dans l'intervalle $]a;b[$.

Exemple :

Pour la fonction f représentée ci-dessous, on suppose qu'elle est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

L'équation $f(x)=0{,}5$ admet-elle une solution unique sur $]1;+\infty[$?



Sur $]1;+\infty[$ f est continue et strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

D'après le graphique : $0{,}5 \in]f(1);+\infty[$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0{,}5$ admet une **unique** solution dans $]1;+\infty[$.

Cette solution est notée a dans le graphique et correspond à **l'unique** antécédent de $0{,}5$ par f , c'est à dire que $f(a)=0{,}5$.