Restitution organisée des connaissances

SUITES

1- Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) 2 suites réelles telles que $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang,

si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration :

Soit $A > 0$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ $u_n > A$,

De plus, comme $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ $v_n \geq u_n$.

Ainsi pour tout n supérieur à la fois à n_0 et à n_1 , $v_n \geq u_n > A$.

On a donc pour tout $A > 0$, $v_n > A$ à partir d'un certain rang, donc, par définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

- Utiliser la définition de la limite

2- Limite d'une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in]1;+\infty[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Démonstration :

Soit $q \in]1;+\infty[$ alors il existe $\alpha > 0$ tel que $q = 1+\alpha$.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$.

<u>Initialisation</u> : $(1+\alpha)^0 = 1$ et $1+0\times\alpha = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0 .

<u>Hérédité</u> : Supposons que la propriété est vraie au rang $k \in \mathbb{N}$ et k <u>fixé</u>, alors $(1+\alpha)^k \geq (1+k\alpha)$,

donc $(1+\alpha)^k \times \mathbf{(1+\alpha)} \geq (1+k\alpha)\times\mathbf{(1+\alpha)}$ $\Rightarrow$ $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+\alpha+k\alpha+k\alpha^2$ soit $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+(k+1)\alpha+k\alpha^2$,

or, $1+(k+1)\alpha+\boldsymbol{k\alpha^2} \geq 1+(k+1)\alpha$, donc $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+(k+1)\alpha$,

donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

La propriété est initialisée à 0 et est héréditaire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$.

Par produit et somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1+n\alpha = +\infty$,

donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+\alpha)^n = +\infty$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

- Démontrer par récurrence que $q^n = (1+\alpha)^n$ est supérieur à $1+n\alpha$

- Utiliser le théorème de comparaison

FONCTION EXPONENTIELLE

3- Unicité de la fonction exponentielle

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors f est unique. On la note $\exp$.

Remarque : on admet l'existence d'une telle fonction.

Démonstration :

Posons la fonction h définie par $h(x) = f(x) \times f(-x)$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors par produit h est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et h est de la forme $u \times v$ donc $h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1) f'(-x)$ soit

$h(x) = f'(x) f(-x) - f(x) f'(-x)$

Or pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x) = f(x)$ donc $h'(x) = f(x) f(-x) - f(x) f(-x) = 0$,

h est donc une fonction constante et il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) = A$

Par définition de f , $h(0) = f(0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1$ et $h(0) = A$, donc $A = 1$,

Ainsi pour tout x de $\mathbb{R}$ $h(x) = 1$, et par définition de h , pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) \times f(-x) = 1$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$ alors $f(\alpha) \times f(-\alpha) = 0 \times f(-\alpha) = 0$.

Or, d'après ce qui précède, $f(\alpha) \times f(-\alpha) = 1$, ce qui est contradictoire,

donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\boxed{f(x) \neq 0}$

Posons la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ où f et g sont 2 fonctions vérifiant les conditions de la propriété (on a donc bien, d'après ce qui précède, que pour tout x de $\mathbb{R}$ $g(x) \neq 0$ et ϕ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier).

ϕ est le quotient de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ϕ est de la forme $\dfrac{u}{v}$

donc $\phi'(x) = \dfrac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$.

Or, d'après la définition de f et g , $f' = f$ et $g' = g$ donc $\phi'(x) = \dfrac{f(x) \times g(x) - f(x) \times g(x)}{(g(x))^2} = 0$,

donc ϕ est une fonction constante et il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout tout x de $\mathbb{R}$ $\phi(x) = B$.

Par définition de f et g , $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$, donc $\phi(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ et de plus, $\phi(0) = B$,

d'où $B = 1$ et ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$ $\phi(x) = 1$ et donc $\dfrac{f}{g} = 1$ soit $\boxed{f = g}$

Donc il n'existe qu'une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

- Étudier la fonction h définie par $h(x) = f(x) \times f(-x)$ pour prouver que $f \neq 0$

- Étudier la fonction $\phi = \dfrac{f}{g}$ avec g et f vérifiant les mêmes conditions pour prouver l'unicité

4- Limites de la fonction exponentielle

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration :

Posons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

f est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = e^x - 1$

la fonction $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

de même $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$,

f admet donc un minimum en 0 qui vaut $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$,

ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) > 0$ et donc, pour tout x de $\mathbb{R}$ $\boxed{e^x > x}$

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}}$

Or $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ par quotient de limites,

donc, par composition de limites, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$ soit $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

- *Étudier la fonction* $f(x) = e^x - x$ *pour comparer* e^x *et* x *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$
- *Utiliser le théorème de comparaison*
- *Utiliser le théorème de composition pour la seconde limite*

PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

5- Équation cartésienne d'un plan

Tout plan de l'espace a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et a, b, c non tous nuls, et réciproquement.

Démonstration :

Soit un plan de l'espace et $\vec{u}\,(a, b, c)$ un vecteur normal à ce plan. Soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point de ce plan.

Pour tout point $M(x\,;y\,;z)$ de ce plan on a $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow a\times(x - x_A) + b\times(y - y_A) + c\times(z - z_A) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

Posons $d = -ax_A - by_A - cz_A$ et on obtient l'équation valable pour tout point du plan : $ax + by + cz + d = 0$

Démontrons la réciproque.

Soit l'équation $ax+by+cz+d=0$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ et a,b,c non tous nuls. Supposons $a\neq 0$

(le raisonnement serait identique pour $b\neq 0$ ou $c\neq 0$),

Posons $x_A=\frac{-b-c-d}{a}$, $y_A=1$ et $z_A=1$,

ainsi $ax_a+by_A+cz_A+d=a\times\frac{-b-c-d}{a}+b+c+d=-b-c-d+b+c+d=0$

Donc le point $A(x_A;y_A;z_A)$ appartient à l'ensemble des points vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$.

Cet ensemble n'est pas vide et on peut poser M un point quelconque de cet ensemble avec $M(x;y;z)$.

Posons $\vec{u}(a;b;c)$ alors $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A$

Les coordonnées de A et M vérifient l'équation, donc $ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=-d+d=0$

Ainsi $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$ donc M appartient au plan passant par A de vecteur normal $\vec{u}$.

L'équation $ax+by+cz+d=0$ définit donc bien un plan.

- Utiliser le produit scalaire pour caractériser un plan

- Pour la réciproque : choisir un point A et un point M quelconque, puis prouver $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$

6- Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à 2 droites sécantes de ce plan.

Démonstration :

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle orthogonale à toute droite de ce plan et donc en particulier à 2 droites sécantes.

Démontrons la réciproque.

Soit une droite (d) orthogonale à 2 droites sécantes d'un plan. Posons $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d) et $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ 2 vecteurs directeurs des 2 droites sécantes du plan. On a donc $\vec{u}.\vec{v_1}=0$ et $\vec{u}.\vec{v_2}=0$.

$\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires car les droites sont sécantes donc $(\vec{v_1};\vec{v_2})$ forment un couple de 2 vecteurs directeurs de ce plan.

Soit une droite quelconque du plan de vecteur directeur $\vec{w}$,

alors il existe x et y réels tel que $\vec{w}=x\vec{v_1}+y\vec{v_2}$,

ainsi $\vec{u}.\vec{w}=\vec{u}.(x\vec{v_1}+y\vec{v_2})=x\vec{u}.\vec{v_1}+y\vec{u}.\vec{v_2}=0$ donc $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{w}$ et donc la droite (d) est orthogonale à toute droite quelconque du plan.

- Poser les vecteurs directeurs des droites

- Utiliser le produit scalaire pour montrer l'orthogonalité

LOIS DE PROBABILITÉS DISCRÈTES

7- Indépendance de 2 événements

Soit 2 événements A et B de probabilité non nulle, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et B aussi.

Vu en 2014 (Polynésie)

Démonstration :

$P_B(A)+P_B(\overline{A})=1$, or A et B sont indépendants, donc $P_B(A)=P(A)$, donc $P(A)+P_B(\overline{A})=1$

ainsi $P_B(\overline{A})=1-P(A) \quad \Leftrightarrow \quad P_B(\overline{A})=p(\overline{A})$

donc, par définition, $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Réciproquement, si $\overline{A}$ et B sont indépendants alors $\overline{\overline{A}}$ et B aussi, donc A et B sont indépendants.

- Utiliser la formule de l'événement contraire pour des probabilités conditionnelles

LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES

8- Espérance de la loi exponentielle

L'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ vaut $\frac{1}{\lambda}$.

Vu en 2015, avec guide, (Asie et Antilles-Guyane)

Démonstration :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Posons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\lambda te^{-\lambda t}$.

Par définition $E(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$.

Pour calculer l'intégrale, dérivons f pour trouver une expression de f en fonction de f' .

f est de la forme $u\times v$ avec $u(t)=\lambda t$ et $v(t)=e^{-\lambda t}$, ainsi : $f'(t)=\lambda\times e^{-\lambda t}+\lambda t\times(-\lambda)e^{-\lambda t}$

On reconnaît $f(t)$ dans le second terme : $f'(t)=\lambda e^{-\lambda t}-\lambda f(t) \Leftrightarrow f(t)=-\frac{1}{\lambda}(f'(t)-\lambda e^{-\lambda t})=-\frac{1}{\lambda}f'(t)+e^{-\lambda t}$

On a alors, par linéarité de l'intégrale : $\int_0^x f(t)dt=-\frac{1}{\lambda}\int_0^x f'(t)dt+\int_0^x e^{-\lambda t}dt$,

donc $\int_0^x f(t)dt=-\frac{1}{\lambda}[f(t)]_0^x+\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x=-\frac{1}{\lambda}(\lambda xe^{-\lambda x}+e^{-\lambda x}-1)$

Or par composition de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}=0$ car $\lambda>0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=-\frac{1}{\lambda}(0+0-1)=\frac{1}{\lambda}$,

ainsi $E(X)=\frac{1}{\lambda}$

- Dériver la fonction f définie par $f(t)=\lambda te^{-\lambda t}$ pour isoler $f(t)$ et calculer l'intégrale

9- Théorème de l'intervalle centré

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite, alors quel que soit $\alpha \in]0;1[$,

il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$

Démonstration :

Posons la fonction p définie sur $[0;+\infty[$ par $p(t) = P(-t \leq X \leq t)$. Par symétrie de la courbe en cloche :

$p(t) = 2P(0 \leq X \leq t) = 2\int_0^t f(x)dx$ où f est la fonction densité de la loi normale centrée réduite.

p est donc dérivable sur $[0;+\infty[$, donc aussi <u>continue</u> sur $[0;+\infty[$ et $p'(t) = 2f(t)$.

f est strictement positive sur $[0;+\infty[$ donc p' aussi, d'où p est <u>strictement croissante</u> sur $[0;+\infty[$.

De plus $p(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 1$ (car $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)dx = \frac{1}{2}$, moitié droite de l'aire totale sous la courbe).

$\alpha \in]0;1[\Leftrightarrow 1-\alpha \in]0;1[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $u_\alpha \in [0;+\infty[$ telle que $p(u_\alpha) = 1-\alpha \Leftrightarrow P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$.

- Étudier la fonction $p(t) = P(-t \leq X \leq t) = 2P(0 \leq X \leq t)$

- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

10- Intervalle de fluctuation asymptotique

Soit X_n une variable aléatoire discrète qui suit une loi binomiale de paramètre n et p , soit Z une variable aléatoire continue qui suit une loi normale centrée réduite, et soit $\alpha \in]0;1[$ et $u_\alpha \in [0;+\infty[$ tel que $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1-\alpha$,

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in \left[p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1-\alpha$

Démonstration :

D'après le théorème de Moivre-Laplace : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1-\alpha$

Or $-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha \Leftrightarrow -u_\alpha\sqrt{np(1-p)} + np \leq X_n \leq u_\alpha\sqrt{np(1-p)} + np$

$\Leftrightarrow \frac{np - u_\alpha\sqrt{n}\times\sqrt{p(1-p)}}{n} \leq \frac{X_n}{n} \leq \frac{np + u_\alpha\sqrt{n}\times\sqrt{p(1-p)}}{n} \Leftrightarrow p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in \left[p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1-\alpha$

- Utiliser le théorème de Moivre-Laplace pour un intervalle centré en 0

FIN DES DÉMONSTRATIONS EXIGIBLES

FIN DES DÉMONSTRATIONS EXIGIBLES

Certains sujets de bac ont questionné les candidats sur des démonstrations non exigibles mais qui sont accessibles à tout élève ayant compris le cours. Ces démonstrations se font en peu d'étapes.

NOMBRES COMPLEXES

11- Propriétés du conjugué

Soit z et z' 2 nombres complexes, alors $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout entier n non nul.

Vu en 2014 (Métropole)

Démonstration :

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$.

$z \times z' = (x+iy)(x'+iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$, ainsi $\overline{z \times z'} = xx' - yy' - i(xy' + yx')$

De plus, $\overline{z} \times \overline{z'} = (x-iy)(x'-iy') = xx' - yy' - ixy' - iyx' = xx' - yy' - i(xy' + yx') = \overline{z \times z'}$

$\overline{z^n} = \overline{z}^n$ se démontre par récurrence.

<u>*Initialisation*</u> : $\overline{z^1} = \overline{z} = \overline{z}^1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$

<u>*Hérédité*</u> : Supposons que la propriété est vraie au rang $k \in \mathbb{N} \backslash 0$ et k <u>fixé</u>, $\Rightarrow$ $\overline{z^k} = \overline{z}^k$.

On a $\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z} = \overline{z^k} \times \overline{z} = \overline{z}^k \times \overline{z} = \overline{z}^{k+1}$, donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

La propriété est initialisée à 1 et est héréditaire donc pour tout $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

- Poser les formes algébriques

- Démontrer par récurrence que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES

12- Expression de la probabilité pour une loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , soit $a, b \in [0 ; +\infty[$,

alors $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Vu en 2015 (Métropole)

Démonstration :

Par définition de la loi exponentielle : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} dx$

Or $\int_a^b e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} \times e^{-\lambda x} \right]_a^b = -\frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}) = \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})$

Donc $P(a \leq X \leq b) = \lambda \times \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

- Utiliser la définition à l'aide d'une intégrale d'une probabilité à densité

13- Propriété de durée de vie sans vieillissement

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ,

alors pour tout $t,h \in [0;+\infty[$ $\quad P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$

Vu en 2014 (Pondichéry)

Démonstration :

Par définition de la probabilité conditionnelle : $P_{X \geq t}(X \geq t+h) = \dfrac{P((X \geq t) \cap (X \geq t+h))}{P(X \geq t)} = \dfrac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)}$

Or $P(X \geq t) = 1-P(0 \leq X \leq t) = 1-(e^{-\lambda \times 0}-e^{-\lambda \times t}) = e^{-\lambda t}$, de même $P(X \geq t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$,

Ainsi $P_{X \geq t}(X \geq t+h) = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t-\lambda h+\lambda t} = e^{-\lambda h} = P(X \geq h)$

- Utiliser la définition de la probabilité conditionnelle

14- Intervalles de fluctuation et de confiance

Soit X_n une variable aléatoire discrète qui suit une loi binomiale de paramètre n et p .

Soit f une valeur prise par la variable aléatoire $\dfrac{X_n}{n}$ des fréquences de succès. Si n est assez grand,

alors on a une probabilité d'au moins 0,95 d'avoir $f \in \left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow p \in \left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Vu en 2013 (Antilles-Guyanne)

Démonstration :

Il est rappelé dans l'énoncé du bac que, d'après le cours, on sait que pour n suffisamment grand :

$$P\left(\frac{X_n}{n} \in \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0{,}95 \ .$$

Donc f (une valeur de $\dfrac{X_n}{n}$) appartient à $\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'au moins 0,95,

soit $p-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq f \leq p+\dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq f-p \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow \ -f-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq -p \leq -f+\dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad f-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (en multipliant par $-1<0$ qui change l'ordre)

Ainsi p appartient à $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité au moins égale à 0,95.

- Faire apparaître $f-p$ dans l'encadrement puis isoler p